Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Hertentamen Statistiek voor Astronomen

2 maart 2012, 14:00–15:00

Je mag boeken en aantekeningen gebruiken. Schrijf leesbaar en motiveer je antwoorden. Zorg dat je naam en studentennummer goed leesbaar op elk ingeleverd blad staan.

Opgave 1

Stel U hebt een steekproef $X_1, ..., X_n$ ter grootte n uit de normale verdeling met onbekende verwachtingswaarde μ en variantie σ^2. Definieer $\nu = \sigma^2$. Laat zien dat de log likelihood voor μ, ν geschreven kan worden als

$$\log \text{lik}(\mu, \nu) \;=\; \text{Constant} - \frac{n}{2}\left(\log(\nu) + \frac{S^2 + (\overline{X} - \mu)^2}{\nu}\right)$$

waar $\overline{X}$, S^2 gedefinieerd worden als $\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/n$.

(a) Bepaal de meest aannemelijke schatters van μ en ν.

(b) Bepaal schatters voor de standaard deviatie van deze schatters.

(c) Stel er is een zeker theorie die de waardes van μ en ν voorspelt, zeg maar: $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$. Beschrijf hoe U deze theorie statistisch zou kunnen toetsen met behulp van een “generalized likelihood ratio test”.

Opgave 2

De *Weibull verdeling* is een kansverdeling van een positieve random variabele X. Deze verdeling heeft kansdichtheid

$$f(x; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}\right)$$

voor $x > 0$. Hierbij zijn $k > 0$ en $\lambda > 0$ parameters.

(a) Bij $k = 1$ reduceert deze verdeling tot een heel bekende verdeling, herkent U hem?

(b) Laat zien dat, zoals hoort, $\int_{x=0}^{\infty} f(x; k, \lambda)dx$ =1.

(c) De cumulatieve verdelingsfunctie $F(x) = P(X \leq x)$ die bij deze verdeling hoort is, uiteraard, gedefinieerd door $F(x) = \int_0^x f(x; k, \lambda)dx$. Bepaal de verdelingsfunctie en leidt hieruit de bijbehorend quantiel functie.

(d) Stel dat we een steekproef ter grootte n uit de Weibull verdeling met parameters k en λ trekken. We maken een QQ-plot van de empirische verdeling van de gegevens tegen de theoretische quantielen van de speciale Weibull verdeling met parameters $k_0 = 1$ en $\lambda_0 = 1$. Hoe ziet deze grafiek uit? Stel dat k en λ onbekende parameters zijn; kunt U uit het vorm van de QQ-plot iets over hun waardes zeggen?

(e) Kunt U een nieuwe empirisch plot bedenken die U zou kunnen gebruiken om in het algemeen te beoordelen, of de waarnemingen wel of niet een Weibull verdeling kunnen hebben? Hint: hoe zie het grafiek van de functie “x gaat naar $y = \log(1 - F(x))$” uit?

Opgave 3

Stel dat de random variabelen X en Y allebei alleen de waardes 0 en 1 aannemen. Laat zien dat X en Y ongecorreleerd zijn, dan en slechts dan als ze onafhankelijk van elkaar zijn.

Opgave 4

Stel X_1, X_2, Y_1 en Y_2 vier random variabelen zijn. Laat zien dat $X_1 < Y_2$ én $Y_2 < X_2$ én $X_2 < Y_1$ impliceert dat $X_1 < Y_1$. Bewijs hieruit dat

$$P(X_1 \geq Y_1) \leq P(X_1 \geq Y_2) \ + P(X_2 \geq Y_2) + P(Y_2 \geq X_1).$$